Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE 3151

Segundo Examen — 8 de marzo de 2012

Nombre:

No. de estudiante: ______________ Profesor: ______________ Sección: ________

Instrucciones

Las reglas para esta prueba son las siguientes:

1. Esta prueba consiste de dos partes: una de selección múltiple (12 problemas) y otra de respuesta libre (6 problemas). Respuesta libre no quiere decir que es opcional, hay que contestar todas las preguntas.
2. Para obtener crédito en los ejercicios de respuesta libre, debe mostrar todo su trabajo.
3. NO SE PERMITE EL USO DE CELULARES.
4. NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORAS.
5. NO SE PERMITE EL USO DE APARATOS ELECTRÓNICOS (IPADS, IPODS, ETC.) QUE PUEDAN INTERRUMPIR A SUS COMPAÑEROS.

Como prueba de que usted ha leído y entendido las instrucciones, favor de firmar en la caja de abajo.

Firma:

Página	Puntos posibles	Puntuación obtenida
2	12	
3	12	
4	12	
5	24	
6	24	
7	24	
Total:	108	

Parte I. Selección Múltiple

1. (3 puntos) Dado que, $y = \left(\frac{1}{x} + 7\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x} + 7\right)$. Encuentre y'.

   A. $y' = -\frac{2}{x^3} - 7$
   B. $y' = -\frac{1}{x^3} - 7$
   C. $y' = \frac{1}{x^3} + 7$
   D. $y' = \frac{2}{x^3} + 7$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

2. (3 puntos) Suponga que $u = u(x)$ y $w = w(x)$ son funciones diferenciables para todo número real x. Además, suponga que $u(1) = 2, u'(1) = -6, w(1) = 6, w'(1) = -2$. Encuentre $\frac{d}{dx}\left(\frac{w(x)}{u(x)}\right)$ cuando $x = 1$.

   A. -10
   B. 8
   C. 16
   D. -8
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

3. (3 puntos) Encuentre la derivada de $r = 11 - \theta^4 \cos(\theta)$.

   A. $\frac{dr}{d\theta} = -4\theta^3 \cos(\theta) + \theta^4 \operatorname{sen}(\theta)$
   B. $\frac{dr}{d\theta} = 4\theta^3 \operatorname{sen}(\theta)$
   C. $\frac{dr}{d\theta} = 4\theta^3 \cos(\theta) - \theta^4 \operatorname{sen}(\theta)$
   D. $\frac{dr}{d\theta} = 4\theta^3 \operatorname{sen}(\theta) - \theta^4 \cos(\theta)$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

4. (3 puntos) Considere los valores de f, g, f', g' en los puntos $x = 3$ y $x = 4$ según la tabla. Encuentre $H'(3)$ dado que $H(x) = \sqrt{f(x) + g(x)}$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
3	1	16	6	5
4	3	3	5	-5

   A. $H'(3) = \frac{11}{2\sqrt{17}}$
   B. $H'(3) = \frac{1}{2\sqrt{17}}$
   C. $H'(3) = \frac{11}{\sqrt{17}}$
   D. $H'(3) = -\frac{1}{2\sqrt{17}}$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

5. (3 puntos) Encuentre todos los puntos en la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 3x$ cuyas rectas tangentes son paralelas a la recta $y = 9x + 9$.

   A. $(0,0), (3,9)$
   B. $(3,9)$
   C. $(3,18)$;
   D. $(6,9)$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

6. (3 puntos) Encuentre la derivada de la función $y = \dfrac{x^2 + 8x + 3}{\sqrt{x}}$.

   A. $y' = \dfrac{3x^2 + 8x - 3}{x}$
   B. $y' = \dfrac{2x + 8}{x}$
   C. $y' = \dfrac{3x^2 + 8x - 3}{2x^{3/2}}$
   D. $y' = \dfrac{2x + 8}{2x^{3/2}}$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

7. (3 puntos) La función $s(t) = 8t^2 + 3t + 9$ nos da la posición de un objeto moviéndose horizontalmente, donde s está dado en metros y t está dado en segundos. Encuentre la velocidad y la aceleración del objeto cuando $t = 2$.

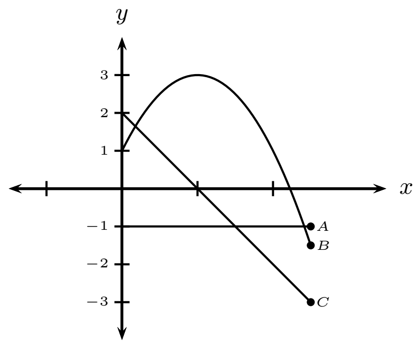
   A. $v(2) = 35\text{m/sec}$; $a(2) = 32\text{m/sec}^2$
   B. $v(2) = 44\text{m/sec}$; $a(2) = 16\text{m/sec}^2$
   C. $v(2) = 19\text{m/sec}$; $a(2) = 2\text{m/sec}^2$
   D. $v(2) = 35\text{m/sec}$; $a(2) = 16\text{m/sec}^2$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

8. (3 puntos) Suponga que $x^3 + y^3 = 9$ y que $\frac{dx}{dt} = -3$. Encuentre el valor de $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 1$ y $y = 2$.

   A. $\frac{4}{3}$
   B. $\frac{3}{4}$
   C. $-\frac{3}{4}$
   D. $-\frac{4}{3}$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

9. (3 puntos) Las gráficas A, B y C ilustradas en la figura, representan la posición $s(t)$, la velocidad $v(t) = s'(t)$ y la aceleración $a(t) = s''(t)$ de un objeto moviéndose horizontalmente como funciones del tiempo t. ¿Cuál gráfica es cuál?



A. C = posición, B = velocidad, A = aceleración
B. B = posición, A = velocidad, C = aceleración
C. B = posición, C = velocidad, A = aceleración
D. A = posición, C = velocidad, B = aceleración
E. Todas las anteriores.
F. Ninguna de las anteriores.

---

10. (3 puntos) En el instante t, la posición de un objeto moviéndose sobre el eje-s está dada por $s(t) = t^3 - 15t^2 + 48t$, donde s está dado en metros y t está dado en segundos. Encuentre la aceleración del objeto cada vez que la velocidad es cero.

A. $a(4) = 24\text{m/sec}^2$; $a(16) = 4\text{m/sec}^2$
B. $a(2) = 0\text{m/sec}^2$; $a(8) = 0\text{m/sec}^2$
C. $a(2) = -18\text{m/sec}^2$; $a(8) = 18\text{m/sec}^2$
D. $a(2) = 18\text{m/sec}^2$; $a(8) = -18\text{m/sec}^2$
E. Todas las anteriores.
F. Ninguna de las anteriores.

---

11. (3 puntos) Utilice la técnica de diferenciación implícita para encontrar $\dfrac{dy}{dx}$ dado que $2xy - y^2 = 1$.

A. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x-y}$
B. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x-y}$
C. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-x}$
D. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y-x}$
E. Todas las anteriores.
F. Ninguna de las anteriores.

---

12. (3 puntos) El volumen de una pirámide de base cuadrada está relacionado a la longitud de un lado de la base s y a la altura de la pirámide h, por la fórmula $V = \dfrac{1}{3}s^2h$. Exprese $\frac{dV}{dt}$ en términos de $\frac{ds}{dt}$, asumiendo que h es constante.

A. $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{2hs}{3}\dfrac{ds}{dt}$
B. $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{2s}{3}\dfrac{ds}{dt}$
C. $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{h}{3}\dfrac{ds}{dt}$
D. $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{s^2}{3}\dfrac{ds}{dt}$
E. Todas las anteriores.
F. Ninguna de las anteriores.

Parte II. Respuesta Libre

13. (12 puntos) Suponga que $F(x) = u(x) \cdot v(x)$, donde $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son diferenciables para todo número real x. Utilizando la definición de derivada, verifique que $F'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$.

14. (Problema de Avalúo.) Considere el límite $\quad L = \lim_{x \to 2} \left(\dfrac{\sqrt{7x+2} - 4}{x - 2} \right).$

    (a) (4 puntos) Identifique el límite como el límite que surge en la definición de la derivada $f'(c)$ de cierta función $f(x)$ en cierto punto $x = c$. ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es c?

    (b) (8 puntos) Utilice sus conocimientos de diferenciación para evaluar L.

15. (12 puntos) Considere la función $f(x) = \begin{cases} Ax^2 + Bx & \text{si } x \leq 3 \\ 17x - (A + B + 11) & \text{si } x > 3 \end{cases}$. ¿Qué valores deben ser A y B para que f sea diferenciable en $x = 3$ y por supuesto continua en $x = 3$?

16. (a) (6 puntos) Simplifique, $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{\tan(x) + 3}\right)$.

(b) (6 puntos) Simplifique, $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}\left(\tan(x^3 + 10x)\right)\right)$.

17. (12 puntos) Simplifique,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2+10x\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(3x-2x^3\right)\right].$$

18. (12 puntos) Uno de los lados de un rectángulo está creciendo a razón de 3 cm/seg y el otro lado está decreciendo a razón de 4 cm/seg. ¿Cuán rápido está cambiando el área del rectángulo cuando el lado que está creciendo mide 12 cm y el lado que está decreciendo mide 10 cm?