Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE 3151

Primer Examen

26 de septiembre de 2012

Nombre:

No. de estudiante: __________ Profesor: __________ Sección: ______

Instrucciones

Las reglas para esta prueba son las siguientes:

1. Esta prueba consiste de dos partes: una de selección múltiple (12 problemas) y otra de respuesta libre (6 problemas). Respuesta libre <u>no quiere decir que es opcional</u>, hay que contestar todas las preguntas.
2. Para obtener crédito en los ejercicios de respuesta libre, debe mostrar todo su trabajo.
3. NO SE PERMITE EL USO DE CELULARES.
4. NO SE PERMITE EL USO DE CALCULADORAS.
5. NO SE PERMITE EL USO DE APARATOS ELECTRÓNICOS (IPADS, IPODS, ETC.) QUE PUEDAN INTERRUMPIR A SUS COMPAÑEROS.

Como prueba de que usted ha leído y entendido las instrucciones, favor de firmar en la caja de abajo.

Firma:

Página	Puntos posibles	Puntuación obtenida
2	12	
3	12	
4	12	
5	24	
6	24	
7	24	
Total:	108	

Parte I. Selección Múltiple

1. (3 puntos) Evalúe, si existe, el siguiente límite: $L = \lim_{x \to -\pi} \left(\sqrt{x+8} \cdot \cos(x+\pi) \right).$

   A. $L = \sqrt{8-\pi}$
   B. $L = -\sqrt{8-\pi}$
   C. $L = 1$
   D. $L = 0$
   E. El límite no existe.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

2. (3 puntos) Evalúe, si existe, el siguiente límite: $L = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x}{-x^3 - 2x + 7} \right).$

   A. $L = \frac{3}{2}$
   B. $L = 2$
   C. $L = -2$
   D. $L = +\infty$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

3. (3 puntos) Evalúe, si existe, el siguiente límite: $L = \lim_{x \to 3^-} \left(\frac{5}{x^2 - 9} \right).$

   A. $L = -\infty$
   B. $L = +\infty$
   C. $L = 1$
   D. $L = 0$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

4. (3 puntos) Considere la función $f(x) = \sqrt{2x}$ definida sobre el intervalo $I = [2, 8]$. Encuentre la tasa promedio de cambio, con respecto a x, de la función $y = f(x)$ sobre el intervalo I.

   A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$
   B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{10}$
   C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$
   D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\frac{1}{3}$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

5. (3 puntos) Dado que $\lim_{x\to c}(f(x)) = -4$ y $\lim_{x\to c}(g(x)) = -9$. Evalúe, si existe, el siguiente límite:

$$L = \lim_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right]^2.$$

A. $L = 97$
B. $L = 169$
C. $L = 5$
D. $L = -13$
E. El límite no existe.
F. Ninguna de las anteriores.

---

6. (3 puntos) Dado que $\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)}{x^2}\right) = 4$. Evalúe, si existe, el siguiente límite:

$$L = \lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)}{x}\right).$$

A. $L = 4$
B. $L = 16$
C. $L = 8$
D. $L = 2$
E. Todas las anteriores.
F. Ninguna de las anteriores.

---

7. (3 puntos) Sean $f(x) = -2x-8, \quad x_0 = 4 \quad$ y $\quad L = -16$. Dado $\epsilon = 0.01$, encuentre un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

A. $\delta = 0.01$
B. $\delta = 0.0025$
C. $\delta = -0.0025$
D. $\delta = 0.005$
E. Todas las anteriores.
F. Ninguna de las anteriores.

---

8. (3 puntos) Dado que x satisface la desigualdad $|x-3| < 1$, encuentre M y N tales que $M < 5x+1 < N$.

A. $M = 11$ y $N = 21$
B. $M = 11$ y $N = 20$
C. $M = 12$ y $N = 21$
D. $M = -1$ y $N = 1$
E. Todas las anteriores.
F. Ninguna de las anteriores.

9. (3 puntos) Considere la función $g(x) = \dfrac{x^2-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. Las asíntotas verticales de la gráfica de $y = g(x)$ están dadas por:

   A. $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$
   B. $x = 1$; $x = 2$
   C. $x = 1$; $x = 3$
   D. $y = 1$; $y = 2$
   E. $y = 1$; $y = 3$
   F. $y = +2$; $y = -2$

---

10. (3 puntos) Considere la función $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 5 & \text{si} \quad x = 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$. La función f tiene una discontinuidad removible en $x = 2$. ¿Cómo debemos redefinir $f(2)$ para que f sea continua en $x = 2$?

   A. $f(2) = 3$
   B. $f(2) = -5$
   C. $f(2) = -4$
   D. $f(2) = 2$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

11. (3 puntos) La pendiente de la curva $f(x) = x^2 - 3$ en el punto $P(-2, 1)$ está dada por el límite:

$$m = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \right).$$

Evalúe m.

   A. $m = -\frac{4+h^2-1}{h}$
   B. $m = +\frac{4+h^2-1}{h}$
   C. $m = -4$
   D. $m = +4$
   E. m no existe.
   F. Ninguna de las anteriores.

---

12. (3 puntos) Dado que $f(x) = x^2 + 5x + 10$, encuentre $f'(1)$.

   A. $f'(1) = 5$
   B. $f'(1) = 6$
   C. $f'(1) = 7$
   D. $f'(1) = 8$
   E. Todas las anteriores.
   F. Ninguna de las anteriores.

Parte II. Respuesta Libre

13. (12 puntos) Utilizando un argumento $\epsilon - \delta$, demuestre que $\lim_{x \to 5} \left(x^2 - 2x + 9 \right) = 24$.

14. (Problema de Avalúo.)

    (a) (4 puntos) Enuncie el teorema del valor intermedio.

    (b) (8 puntos) Considere la función $F(x) = x^2 + \cos(\pi x)$. Utilice el teorema del valor intermedio, con un intervalo apropiado $[a, b]$ para demostrar que existe un valor c tal que $F(c) = 4$. Indique claramente el intervalo que utilizó. Explique.

15. (12 puntos) Utilizando la definición de la derivada, encuentre $f'(5)$, para la función $f(x) = \sqrt{2x+6}$.

16. (a) (4 puntos) Enuncie el teorema del Sandwich.

(b) (8 puntos) Dado que para cierta función $f(x)$,

$$3x \leq f(x) \leq x^3 + 2,$$

para todo número real x en el intervalo $[0, 2]$. Encuentre $\lim_{x \to 1} (f(x))$. Explique.

17. (12 puntos) Considere la función $g(x) = \begin{cases} Ax - B & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 2x^2 + 3Ax + B & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \\ 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$. Encuentre los valores de A y B que hacen que g sea continua en todo número real x. Explique

18. (a) (6 puntos) Evalúe, $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan(2x)}{\tan(\pi x)} \right)$.

(b) (6 puntos) Evalúe, $\lim_{x \to 3} \left(\dfrac{x^2 - 9}{x^4 - 81} \right)$.